Демонстрационный вариант вступительных испытаний по высшей математике в Академию больших данных MADE

1. Найдите все натуральные m и n такие, что

$$1! + 2! + \ldots + n! = m^2.$$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = 10^{2/3}$.

3. Найдите функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$(x^2y^2 + y)dx + (2x^3y - x)dy = 0$$

и такую что $y(1) = 1$. В ответе укажите значением найденной Вами функции в точке $x_1 = -1/2$.

4. Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{D_n}$, где

$$\begin{pmatrix} 19 & -48 \\ 8 & -21 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

5. Данная функция $f : R \to R$ такая что для любого $x \in R$

$$f(x+2) + af(x) = f(x+1), \quad f(3) = 2013, \quad a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Найдите $f(2013)$.

6. С одинаковой вероятностью на рулетке может выпасть любое число от 0 до 2019. Рулетку крутят раз за разом. Обозначим через P_k вероятность того, что в какой-то момент сумма чисел, выпавших при всех сделанных бросках, равна k. Какое число больше: P_{2019} или P_{2020}?

7. Пусть $x = \frac{7}{51}$. Известно, что для некоторого натурального k число x записывается в k-ичной системе счисления как $0,\overline{23}_k = 0,232323\ldots_k$. Найдите k.

8. На экзамен пришло n студентов. Преподаватель ставит студенту неуд (двойку) с вероятностью $0 < p < 1$. Однако, поставив неуд, преподаватель ставит неуд и всем последующим студентам. Найдите вероятность того что неуд получит ровно k студентов. Найти математическое ожидание числа студентов, получивших неуд.

9. Найдите значение производящей функции последовательности $c_n = C_{n+9}^{10}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в точке $x_0 = 1/2$.

10. Сколько существует перестановок $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ чисел $1, 2, \ldots, N$, таких, что для любого индекса $1 < i \leq N$ найдется индекс $j < i$, такой что $\sigma_j = \sigma_i - 1$ или $\sigma_j = \sigma_i + 1$.